Übungsblatt 7 - Musterlösungen

Technische Hochschule Mittelhessen
FB MNI, Lineare Algebra für Informatiker, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

Bitte berechnen Sie die Determinanten der Matrizen und geben Sie das benutzte Verfahren sowie die wesentlichen Zwischenschritte an

a.) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ b.) $\begin{pmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{pmatrix}$ c.) $\begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ -b & 0 & b \end{pmatrix}$ d.) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & x \\ 2 & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix}$

e.) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 2 & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & x \end{pmatrix}$ f.) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ g.) $\begin{pmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung Aufgabe 1:

a.) Für eine 2×2- Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist die Determinante bekanntlich $ad - bc$.

Das ergibt hier $3 \cdot 5 - (-2) \cdot (-4) = 15 - 8 = 7$.

b.) Begründung wie in Teil a.) - die Determinante ist $a - (-a) = 2a$.

c.) Entwicklung nach der zweiten Zeile ergibt als Determinante

$(-1)^{2+2} \cdot b \cdot det(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -b & b \end{pmatrix} = b(b - (-b)) = 2b^2$.
Alternative: Berechnung mit $\mathbb{R}^3$-Sarrrus ergibt als Determinante
$1 \cdot b \cdot b + b \cdot 0 \cdot (-b) + 1 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot b \cdot (-b) - 1 \cdot 0 \cdot 0 - b \cdot 0 \cdot b = 2b^2$

d.) Zunächst wird die erste Zeile zweimal von der dritten abgezogen. Dadurch ändert sich die Determinante nicht. Die entstehende Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & x \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix}$$

Das ist eine obere Dreiecksmatrix. Ihre Determinante ist also das Produkt der Diagonalelemente, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot y = 6y$. Somit ist auch die Determinante der ursprünglichen Matrix $6y$.

e.) Die Matrix entsteht aus der Matrix aus Teil d. durch Vertauschen der zweiten und der vierten Zeile.

Vertauschen zweier Zeilen ändert das Vorzeichen der Determinante. Nach Teil d. ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & x \\ 2 & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix} = 6y.$$

Also ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 2 & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & x \end{pmatrix} = -6y.$$

f.) Entwickeln der Determinante nach der ersten Zeile liefert:

$$\det\begin{pmatrix}0&1&0&0\\2&8&1&-1\\0&3&0&1\\1&4&2&3\end{pmatrix} = (-1)\cdot\det\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&0&1\\1&2&3\end{pmatrix} = (-1)\cdot(0+1+0-0-4-0) = (-1)\cdot(-3) = 3$$

Dabei wurde für die 3×3-Matrix die Regel von Sarrus benutzt (geht nur im $\mathbb{R}^3$).

g.) Zunächst wird die dritte Zeile von der ersten und dann von der zweiten abgezogen. Durch diese elementaren Zeilentransformationen bleibt die Determinante unverändert, und man erhält die Matrix

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Die Determinante wird durch Entwicklung nach der letzten Spalte berechnet, und man erhält als Wert $(-1)^{3+3}\cdot(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = 1$.

Aufgabe 2

Für welche Werte von $\lambda, y \in \mathbb{R}$ sind die Determinanten der folgenden Matrizen Null?
m und k sind Konstanten.

a.) $\begin{pmatrix}4-\lambda & -1 & 0\\ 1 & 2-\lambda & 0\\ -9 & 3 & -\lambda\end{pmatrix}$ b.) $\begin{pmatrix}-my+2k & -k\\ -k & -my+2k\end{pmatrix}$

Bitte begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung Aufgabe 2:

a.) Man kann die Determinante mit dem $\mathbb{R}^3$-Sarrus berechnen, oder durch Entwicklung nach der letzten Spalte. In beiden Fällen erhält man die Determinante

$$(4-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(-\lambda)-\lambda.$$

Dabei wurden Summanden, die Null sind, nicht aufgeführt.

Umformung ergibt:

$$\begin{aligned}&(4-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(-\lambda)-\lambda\\ =&(-\lambda)\cdot((4-\lambda)\cdot(2-\lambda)+1)\\ =&(-\lambda)\cdot(8-6\lambda+\lambda^2+1)\\ =&(-\lambda)\cdot(\lambda^2-6\lambda+9)\\ =&(-\lambda)\cdot(\lambda-3)^2 \qquad \text{(zweite binomische Formel)}\end{aligned}$$

Die Determinante ist also 0 bei $\lambda = 0$ und $\lambda = 3$.

b.) Nach der Determinantenregel für 2×2-Matrizen ist die Determinante
$(-my+2k)^2 - k^2 = m^2y^2 - 4kmy + 3k^2.$

Fall $m \neq 0$: Der Ausdruck ist Null, wenn gilt

$$y^2 - \frac{4k}{m}\cdot y + \frac{3k^2}{m^2} = 0.$$

Anwendung der pq-Formel liefert

$$y_{1,2} = \frac{2k}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{2k}{m}\right)^2 - \frac{3k^2}{m^2}}.$$

Das heisst, $y_1 = \frac{3k}{m}$ und $y_2 = \frac{k}{m}$.

Fall $m = 0$: Der Ausdruck ist Null, wenn gilt $3k^2 = 0$, d.h., wenn auch $k = 0$ gilt.

Aufgabe 3

Bitte berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix, und geben Sie das benutzte Verfahren sowie wesentliche Zwischenschritte an.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung Aufgabe 3:

Die Determinante wird mit dem Gauss-Verfahren berechnet. Dazu wird zunächst die letzte Zeile von allen anderen Zeilen abgezogen. Das lässt die Determinante unverändert und ergibt die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Als weitere Zeilentransformation wird jetzt nacheinander jede der ersten vier Zeilen von der letzten Zeile abgezogen. Das lässt die Determinante unverändert und ergibt die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Nach dem Gauss-Verfahren ist die Determinante einer unteren Dreiecksmatrix das Produkt der Diagonalelemente. Die gesuchte Determinante ist also 6.

Aufgabe 4

(Verallgemeinerung von Aufgabe 3 - ist doch immer hilfreich, wenn man den allgemeinen Fall kennnt ... wenn es auch anspruchsvoller wird ...).

Es sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$- Matrix mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{falls } i = j \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bitte bestimmen Sie die Determinante von A.

Lösung Aufgabe 4:

Die Determinante wird mit dem Gauss-Verfahren berechnet. Dazu wird zunächst die letzte Zeile von allen anderen Zeilen abgezogen. Das lässt die Determinante unverändert und ergibt die Matrix $A' = (a'_{ij})$ mit

$$a'_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \text{ und } i < n \\ 2, & \text{falls } i = j = n \\ -1, & \text{falls } i < n \text{ und } j = n \\ 1, & \text{falls } i = n \text{ und } j < n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

d.h.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

Als weitere Zeilentransformation wird jetzt nacheinander jede der ersten $n-1$ Zeilen von der letzten Zeile abgezogen. Das lässt die Determinante unverändert und ergibt die Matrix A'' mit

$$a''_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \text{ und } i < n \\ 2 + n - 1, & \text{falls } i = j = n \\ -1, & \text{falls } i < n \text{ und } j = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

d.h.

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 + n - 1 \end{pmatrix}$$

.

Nach dem Gauss-Verfahren ist die Determinante einer unteren Dreiecksmatrix das Produkt der Diagonalelemente. Die gesuchte Determinante ist also $n + 1$.

Aufgabe 5

Bitte googlen Sie „determinante online“, gehen Sie zu einem der Tools und spielen Sie ein bisschen. Erfinden Sie Matrizen und lassen Sie die Determinanten ausrechnen.

Lösung Aufgabe 5:

Hier gibt es keine Musterlösung :).